לוגיקה (א) תרגיל 4

1. איווי וגימום מרובים. לכל $n \geq 0$ נגדיר לוחות אמת n מקומיים $t_\vee^n$ ו-$t_\wedge^n$ באינדוקציה על n:

- $n = 0$: $t_\vee^0() = F$ ו-$t_\wedge^0() = T$.
- $n > 0$: $t_\vee^n(x_1, ..., x_n) = t_\vee(t_\vee^{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}), x_n)$ ו-$t_\wedge^n(x_1, ..., x_n) = t_\wedge(t_\wedge^{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}), x_n)$.

(א) הוכח כי אכן אילו לוחות האמת של הגימום והאיווי המרובים כלומר הוכח:

- לכל $n \geq 1$: $t_\vee^n(x_1, ..., x_n) = F$ אםם $x_i = F$ לכל $1 \leq i \leq n$.
- לכל $n \geq 1$: $t_\wedge^n(x_1, ..., x_n) = T$ אםם $x_i = T$ לכל $1 \leq i \leq n$.

(ב) הסבר את ההיגיון שעומד מאחורי ההסכם המקובל: איווי ריק הוא סתירה, וגימום ריק הוא טאוטולוגיה.

2. לכל אחד מהפסוקים, ϕ, בשפה $L = \{P_1, P_2, P_3\}$ רשום את לוח האמת שלו $t_\phi(x_1, x_2, x_3)$ כהרכבה של הפונקציות: $t_\neg, t_\vee, t_\wedge, t_\to$.

(א) $\phi = P_1 \wedge (\neg(P_2 \to P_1) \vee P_3)$.

(ב) $\phi = \neg(P_1 \vee P_2 \vee P_3)$.

(ג) $\phi = (P_1 \wedge P_2) \to \neg(P_2 \vee P_3)$.

(ד) $\phi = P_1 \to P_2 \to P_3$.

3. תהי $L = \{P_1, ...P_n\}$ שפה לתחשיב הפסוקים.

(א) מהו המספר המקסימלי של לוחות אמת <u>שונים</u> לשפה, כלומר לוחות אמת n מקומיים? הוכח טענתך.

(ב) הסק כי קיים חסם מלעיל על הגודל של קבוצת פסוקים ב-L שכל שניים מהם אינם שקולים.

4. יהיו Γ, Δ קבוצות פסוקים, ϕ, ψ פסוקים. הוכיחו:

(א) אם $\phi \in \Gamma$ אז $\Gamma \models \phi$.

(ב) $\Gamma \models \phi \to \psi$ אםם $\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi$.

(ג) אם $\Gamma \subseteq \Delta$ ו-$\Delta \models \phi$ אז $\Gamma \models \phi$.

(ד) $\Gamma \cup \{\phi\}$ אינה עיקבית אםם $\Gamma \models \neg\phi$.

(ה) $\Delta \equiv \Gamma$ אםם $\Gamma \models \Delta$ וגם $\Delta \models \Gamma$.